Resumen Análisis

Contenidos:

- ***Unidad 2(Continuidad) (De la página 1 a 12)***
- ***Unidad 3(Derivadas) (De la página 13 a 38)***

Unidad 2

Funciones Continuas

Funciones continuas en un punto

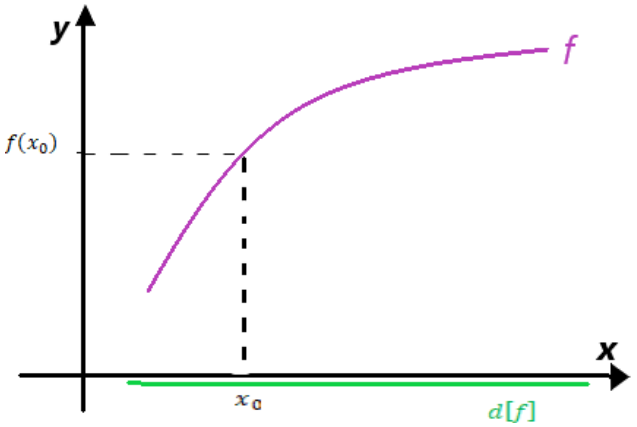
Supongamos que:

- f es una funcion escalar cuyo dominio es d$[f] \subset \mathbb{R}$
- $x_0 \in \mathbb{R}$

El conjunto d$[f]$ tiene al menos un punto en común con E*(x_0) es decir que $d[f] \cap \mathrm{E}*(x_0) \neq \emptyset$

Se dice que f es continua si se verifican las siguientes condiciones:

- $x_0 \in d[f]$, (es decir lo mismo que existe $f(x_0)$)
- Existe y es finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

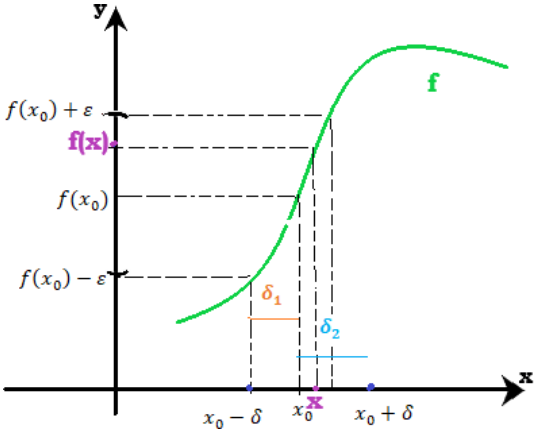


Intuitivamente: Una función f es continua en x_0 sí para todos los puntos del dominio de la función suficientemente próximos a x_0, los valores correspondientes de f son próximos a $f(x_0)$

De forma gráfica una función es continua si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel

Se dice que una función es **continua** en x_0 si y solo si

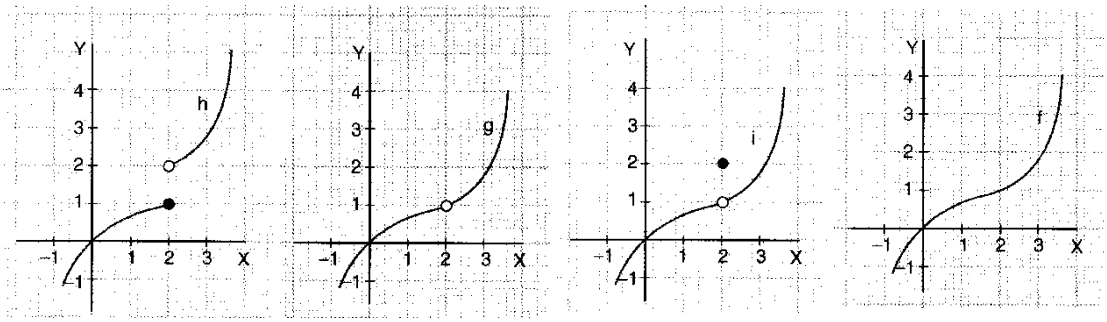
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_s > 0 / \forall x : x \in d[f] \text{ A } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Llamo δ al menor entre δ_1 y δ_2

$$\delta = menor\{\delta_1, \delta_2\}$$

Los puntos en que haya que levantar el lápiz se llaman **puntos de discontinuidad.**



En las figuras anteriores vemos algunos casos (no todos) que pueden presentarse al pasar f por un punto x_0. (En este caso, para $x_0 = 2$)

En la primera figura la función no es continua porque los limites laterales son distintos, es decir, no existe, $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

En la segunda figura no existe la imagen del punto x_0 que sería f(x_0).

En la tercera existe f(x_0) pero no se cumple con la tercera condición de continuidad $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Y por último, en la cuarta figura se cumple las tres condiciones de continuidad y la función es continua.

Las funciones constantes, identidad, potencial, polinómicas son continuas en cada punto de sus respectivos dominios.

Ejemplos 1: La función *f* definida por la ecuación *f* (x) = $f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x < 2 \\ 4 \ si \ x \geq 2 \end{cases}$ ¿es continua en el punto x = 2?

Veamos si se cumplen las tres condiciones de continuidad:

1. $\exists \ f(2)? \ Calculamos \ f(2) = 4$
2. $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$?

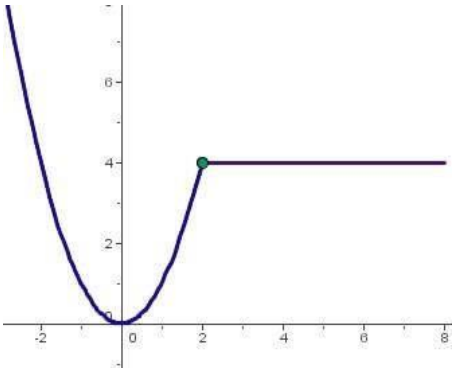
$$\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Por lo tanto, *f* (x) **es continua** en el punto x = 2



Ejemplo 2: La función f definida por la ecuación *f* (x) = $\frac{x+2}{x-2}$ ¿es continua en el punto x = 3?

Veamos si se cumplen las tres condiciones de continuidad:

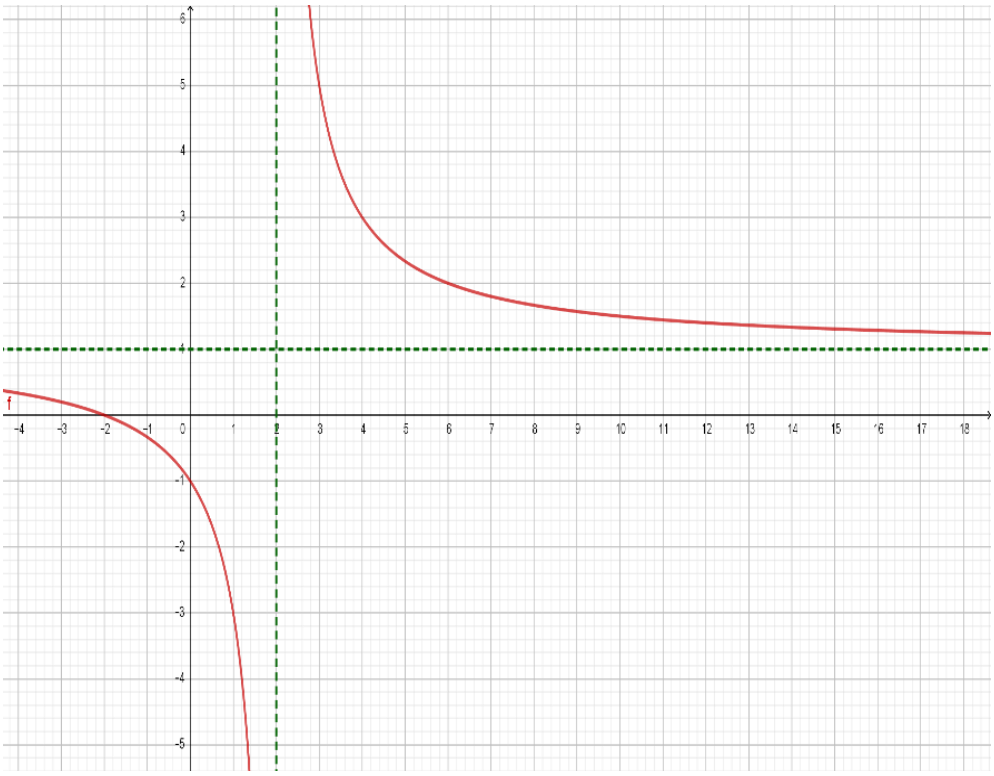
1. $\exists \ f \ (3)?$ Calculamos $f(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5$
2. $\exists \ \lim_{x \to 3} f(x)$?

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

3. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

Por lo tanto, f (x) **es continua** en el punto x = 3



La función Racional que es el cociente de dos funciones polinómicas es continua siempre que la función que se encuentra en el denominador no se anule en algún punto.

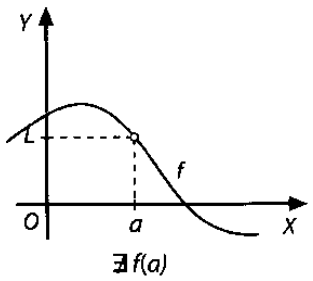
- Una función es **discontinua** en un punto sino **no** es continua en ese punto.

Teniendo en cuenta que una función es continua en un punto x = a sí, y solo si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, en ese caso de que esta condición no se cumpla por algún motivo, tendremos uno de los siguientes tipos de discontinuidades.

$$Discontinuidades \begin{cases} Evitable \\ Esencial \end{cases}$$

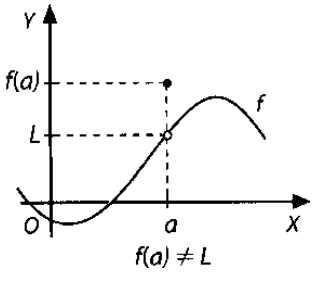
Discontinuidad Evitable

Sea f una función discontinua en punto x_0 sí existe y es finito $\lim_{x \to x_0} f$ se dice que la discontinuidad es **Evitable.**



$\exists f(a)$

Discontinuidad evitable



$f(a) \neq L$

Discontinuidad evitable

Este tipo de discontinuidad se resolvería o evitaría redefiniendo la función para hacerla continúa a partir de la que tenemos, de la siguiente manera:

$$f(x) = f \; en \; d[f] - \{x_0\} \wedge f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f$$

Ejemplo:

- Estudiar la continuidad de la función definida por
  - $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

    En el punto x = 3.

Si observamos la función, resulta que no esta definida en el punto x = 3 pero, si calculamos el límite de la función en ese punto, obtenemos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3) \,.\, (x - 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

Que seria el verdadero valor de la función en ese punto. La nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \; si \; x \neq 3 \\ 1 \; si \; x = 3 \end{cases}$$

Luego seria continua en el punto x = 3

Discontinuidad Esencial

Se die que la discontinuidad de *f* es **Esencial** si no es evitable, o sea sino existe el límite de la función en el punto.

Ejemplo. Estudiar la continuidad de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \; si \; x \leq 1 \\ 3 - 2x \; si \; x > 1 \end{cases}$$

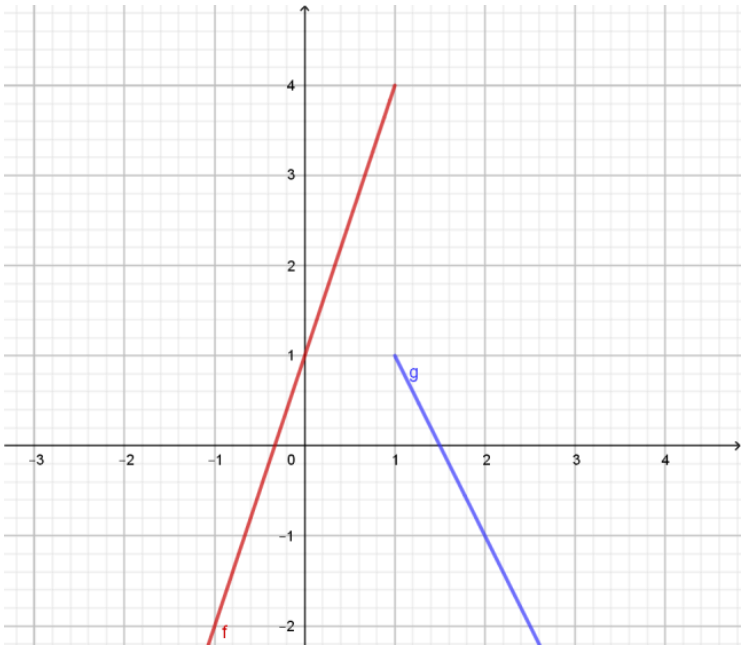
En el punto x = 1

Para estudiar la continuidad en el punto x = 1, analizamos si se verifican las tres condiciones:

1. La función está definida en el punto x = 1: $f(1) = 4$
2. Estudiamos la existencia del límite en x = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función.
   $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x + 1) = 4$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - 2x) = 4$

   Al ser los limites laterales iguales, la función no tiene limite en dicho punto.

   En consecuencia, en x = 1, la función presenta una **discontinuidad esencial**

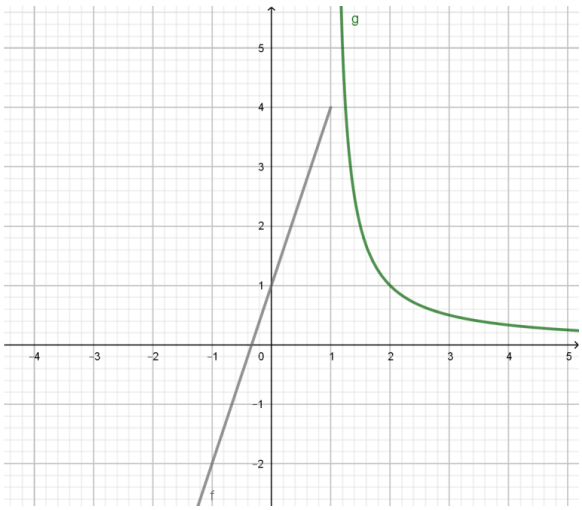


Para estudiar la continuidad en el punto x = 1, analizamos si se verifican las tres condiciones de continuidad.

1. La función esta definida en el punto x = 1: $f(1) = 3.1+1 = 4$
2. Estudiamos la existencia del límite en x = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x + 1) = 4 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

En consecuencia, en x = 1, la función presenta una discontinuidad inevitable.

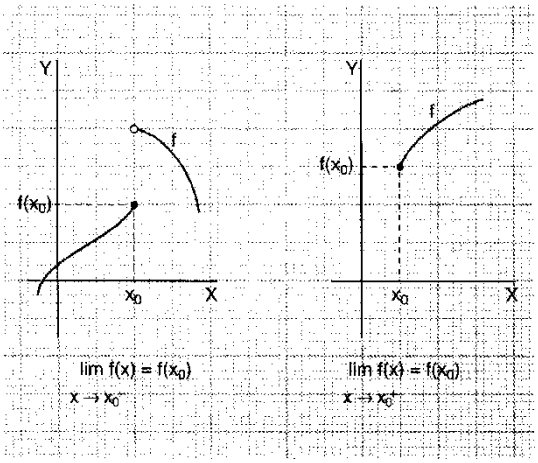


Continuidad Lateral en un punto

Se dice que una función *f* es continua a la derecha en un punto x_0 si se verifican las siguientes condiciones:

1. $x_0 \in d[f]$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\ \ existe\ y\ es\ finito$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(x_0)$

- Se dice que una función *f* es continua a la izquierda en un punto x_0 si se verifican las siguientes condiciones:
  1. $x_0\ \in d[f]$
  2. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)\ \ existe\ y\ es\ finito$
  3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



Propiedades de las Funciones Continuas en un Punto

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones y de los límites, podemos deducir las siguientes propiedades:

Si *f* y g son funciones continuas en el mismo dominio D, entonces son continuas en x_0 las siguientes funciones:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f.g)(x) = f(x)\,.\,g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ g(x_0) \neq 0$

Continuidad de las funciones compuestas

Si *f* es continua en x_0, g es continua en $f(x_0)$, entonces **go*f*** es continua en x_0.

Propiedad: La función *f* es continua en x_0 sí y solo si

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

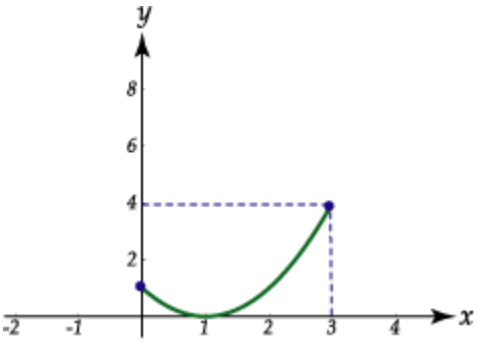
$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

Continuidad en Conjunto

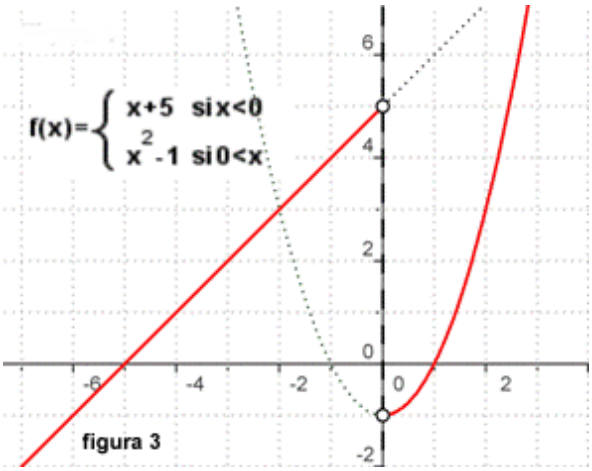
Sea *f* una función escalar y A un subconjunto del d[*f*]. Se dice que *f* es continua en el conjunto A si es continua en cada punto de A.

- Una función es continua en un intervalo $[a, b]$ sí es continua en cada punto del (a, b) y además es continua a la derecha de "a" y a la izquierda de "b".
- *f* es continua en (a, b) sí y solo si *f* es continua en cada $x \in (a, b)$

En caso de que el intervalo sea cerrado, $[a, b]$, es necesario que la función también sea continua lateralmente en los extremos.



Así, en la función adjunta, podemos apreciar que hay continuidad en el intervalo $[-4,-1]$, pero no en el intervalo $[-1,1]$.

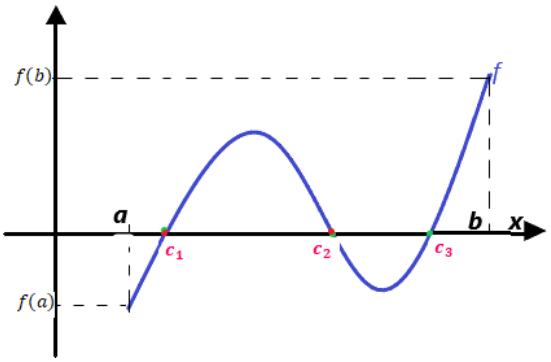


Teoremas sobre Funciones Continuas

Teorema de Bolzano

Si una función *f* es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y $f(a).f(b) < 0$ entonces existe al menos un punto interior "c" del intervalo tal que *f* (c) = 0.

Interpretación Geométrica:



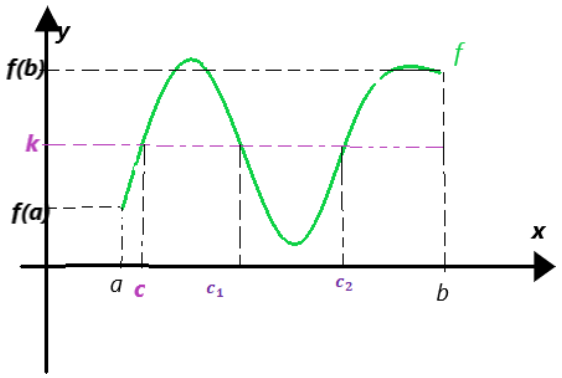
Geométricamente este teorema nos dice que, si una función f es continúa en un intervalo cerrado, entonces la misma toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo y por lo tanto en el interior de dicho intervalo hay al menos un punto para el cual el valor de la función es cero. Este teorema es de utilidad para la determinación de los ceros de una función.

Teorema del Valor Intermedio

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], si

$f(a) < f(b)$ *o* $(f\ (a) > f(b))$ entonces para cualquier valor k comprendido entre $f(a) < k < f(b)$ *o* $f(a) > k > f(b)$ existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que f (c) = k

Interpretación Geométrica



Geométricamente este teorema nos dice que si una función *f* es continua en [a, b] y $f(a) \neq f(b)$ entonces dicha función toma por lo menos cada uno de los valores de k comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

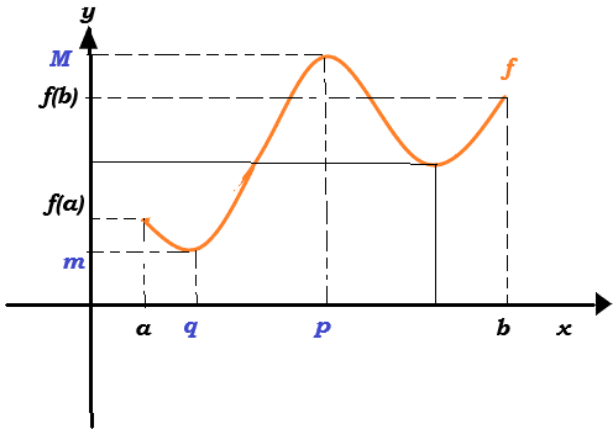
Los valores de una función continua en un intervalo cerrado no pueden pasar de uno a otro sin hacerlo por todos los valores intermedios.

Teorema: Si *f* es una función continua en [*a*, b], entonces *f* esta **acotada en dicho intervalo.**

Teorema de Weierstrass:

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] entonces *f* tiene máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.

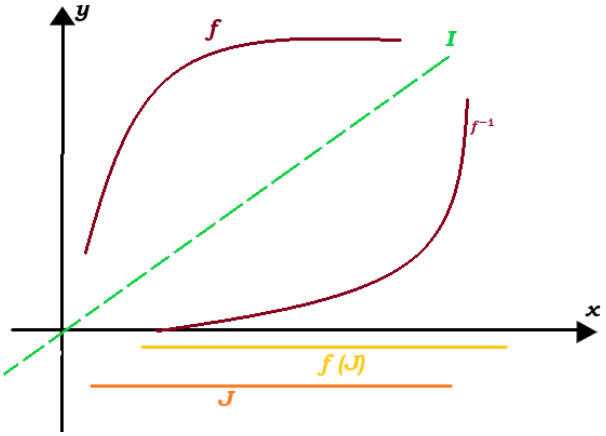
Interpretación geométrica



Geométricamente este teorema significa que dada una función continua en un intervalo cerrado [a, b], su grafica queda comprendida entre las rectas y = **M** e y = **m**, siendo **M** y **m** los valores máximo y mínimo que alcanza la función en el intervalo.

Teorema: Si *f* es una función continua en un intervalo J, entonces es conjunto *f* (J) es un intervalo.

Teorema: Si *f* es una función estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) y además es continua en un intervalo "J" entonces f^{-1} es una función estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) y además se continua en el intervalo *f* (J).



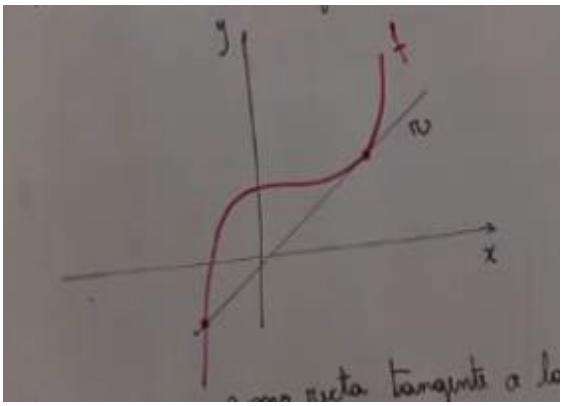
Unidad 3

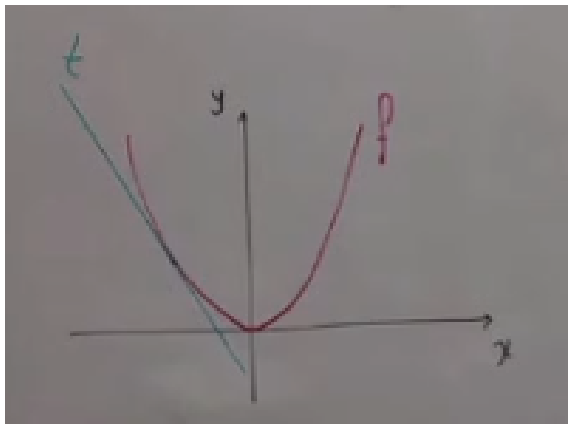
La derivada

Es uno de los conceptos más importantes del cálculo así también es un concepto básico del cálculo diferencial

La noción de derivada se origina con el problema de la "Recta Tangente" a la gráfica de una función en un punto de la misma.

Consideramos las siguientes graficas





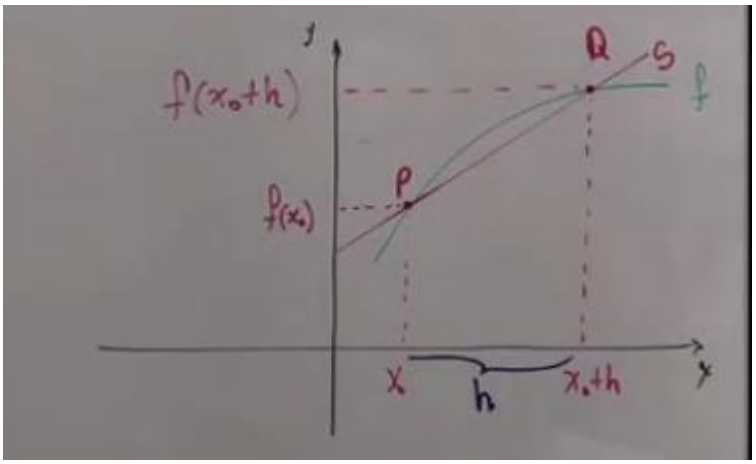
Si definimos como recta tangente a la recta que tiene un solo punto en común con dicha grafica entonces la recta "r" no es tangente y la recta "t" si lo es.

Además para encontrar la ecuación de la recta tg a la gráfica de una función en un punto de la misma, debemos conocer la pendiente de una recta tangente. Para conocer dicha pendiente debemos conocer otro punto y en este contexto podemos formular una definición de recta tangente.

Para ello consideramos:

- $f\ una\ funcion\ escalar\ con\ d[f]$
- $x_0\ un\ punto\ del\ d[f]$
- $h \neq 0\ tal\ que\ x_0 + h \in d[f]$
- $f(x_0 + h) - f(x_0)$ incremento de f con respecto a h

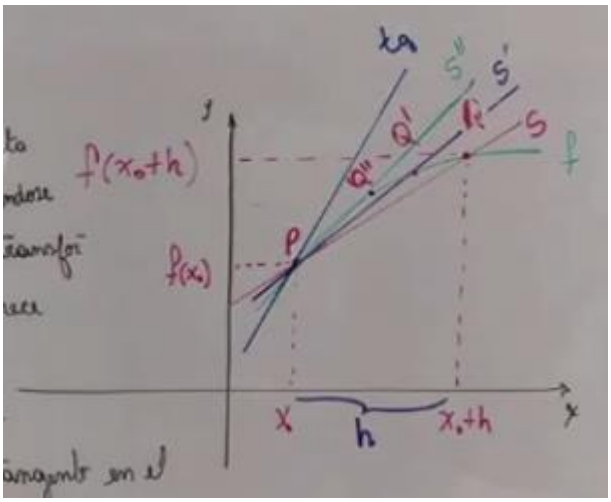
Como $h \neq 0 \Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ Cociente incremental



En el grafico podemos observar que la pendiente de la recta secante "s" que tiene el punto $P = (x_0, f(x_0))$ con el punto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ es igual al cociente incremental.

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A medida que "h" es cada vez "mas pequeño", resulta que el punto "Q" se mueve sobre la gráfica de *f* acercándose al punto "P". De esta manera la recta secante puede transformarse en "Recta Tangente" y dicha recta tangente parece ser el límite de las rectas secantes "S" cuando h tiene a cero, es decir la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente en el límite, es decir $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es el límite de sus pendientes



Derivada de una función en un Punto

Sea *f* una función escalar $f.d[f] \to r/d[f] \subset \mathbb{R}$

Sea x_0 un punto del dominio de $f.x \mapsto f(x)$

Para cada $h \neq 0$, tal que $x_0 + h \in d[f]$ consideremos el numero $f(x_0 + h) - f(x_0)$ que se denomina Incremento del Valor de la Función *f* en x_0 con respecto a h.

Como $h \neq 0$, tiene sentido considerar el numero $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ al que denominamos.

Cociente incremental $\frac{\Delta f(x_0,h)}{h}$

Este cociente representa un cociente de Cambio, cociente de variaciones o razón de cambio promedio.

El numerador simboliza la variación de la función y el denominador la variación de la variable.

Si tenemos h cada vez más pequeña $(h \to 0)$ el punto Q se mueve sobre la grafica de *f* acercándose a P. Es decir, cuando $h \to 0, Q \to P, S \to t$

En consecuencia

$$m_t = \lim_{\alpha \to \beta} m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{h}$$

Definición: *f* es derivable o diferenciable en x_0 si existe y es finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; y \; escribimos \; f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El numero real $f'(x_0)$ se denomina Derivada de *f* en x_0

Definición: Si *f* es derivable en x_0, denominamos Recta tangente a la grafica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es $f'(x_0)$.

La ecuación es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Geométricamente la derivada de una función en un punto se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Ejemplo: Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por $f(x) = x^2$ en el punto (2, 4).

Buscamos una recta cuya ecuación sea $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

El punto (2, 4) $\in f$

Por lo tanto $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

1) Calculamos el cociente incremental $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{2}$

   Tomamos el limite en ambos miembros de la igual

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h} 4 + h = 4$$

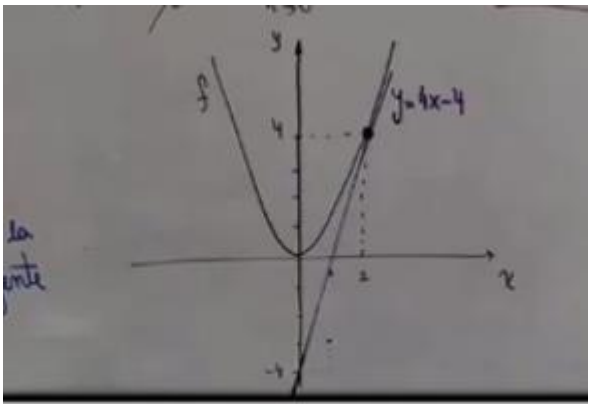
$$\Longrightarrow f'(2) = 4$$

Luego reemplazo:

$y = 4(x - 2) + 4$

$y = 4x - 8 + 4$

$y = 4x - 4$ (Ecuación de la recta tangente)



Función Derivada

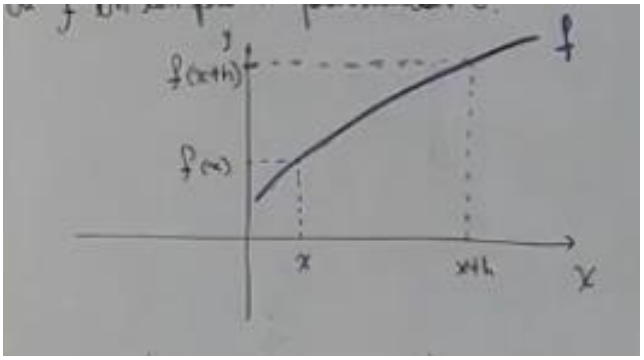
Sea f una función definida en un conjunto D y sea $D_0 \subset D$. Si f tiene derivada finita en cada punto $x \in D_0$, la función derivada f' cuyo dominio es D_0 es aquella que a cada $x \in D_0$ asigna como imagen $f'(x)$.

Por convención se emplea $f'(x)$ para determinar la función derivada y $f'(c)$ para la derivada de f en un punto particular c.

Para cada $h \neq 0$ tal que $x + h \in d[f]$ consideremos el numero $f(x+h) - f(x)(cociente\ incremental)$ del valor de la función x con respecto a h

Como $h \neq 0$ tiene sentido considerar

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Ejemplo: Sea f una función definida por $f(x) = 3 - y^2$ Obtener la derivada por definición.

1. Calculamos $f(x+h) = 3 - (x+h)^2 = 3 - (x^2 + 2xh + h^2) = 3 - x^2 - 2xh - h^2$
2. Calculamos $f(x) = 3 - x^2$
3. Calculamos $f(x+h) - f(x) = \cancel{3 - x^2} - 2xh - h^2 \cancel{- 3 + x^2} = -2xh - h^2$
4. Formamos el cociente incremental
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2xh - h^2}{h} = \frac{h(-2x-h)}{h} = -2x - h$$
5. Tomamos el limite en ambos lados de la igualdad
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} -2x - h = -2x$ Como el limite existe para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $f'(x) = -2x$

Luego la función derivada f' se define como $f'(x) = -2x \; \forall x \in \mathbb{R}$

$$f' = \{(x, f'^{(x)}) \in R^2 / f'(x) = -2x\}$$

Derivadas laterales

Se dice que *f* tiene derivada a la derecha de x_0 $si \; \exists \; y \; es \; finito$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ y se lo representa $f'({x_0}^+)$

Análogamente

Se dice que *f* tiene derivada a la izquierda de x_0, siempre que exista y sea finito

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ y se lo representa $f'({x_0}^-)$

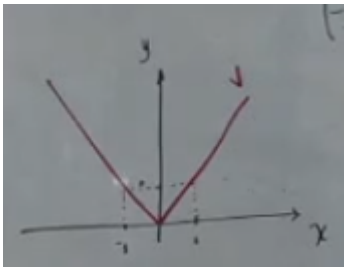
La derivada a la derecha (izquierda) de una función en un punto se denomina **Derivada Lateral**

Propiedad Sea *f* una función con derivadas laterales en un punto x_0 si y solo si ambas derivadas laterales son iguales $f'({x_0}^+) = f'({x_0}^+)$

Por lo tanto, *f* es derivable en x_0

Ejemplo 3

Sea $V(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ La función valor absoluto es derivable en $x_0 = 0$?



$h \neq 0$ Calculamos el cociente incremental

$\frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$ Analizamos

$h > 0 \; \frac{V(0+h)-V(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, Si existe el limite en el segundo miembro $\lim_{h\to 0} 1 = 1 \Longrightarrow \exists$ el limite en el primer miembro, luego $\lim_{h\to 0^+} \frac{V(0+h)-V(0)}{h} = 1 \Longrightarrow V'(0^+) = 1$

$h < 0$ $\frac{V(0+h)-V(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = -1$, como $\exists$ y es finito el limite en el segundo miembro $\lim_{h\to 0^-} \frac{V(0+h)-V(0)}{h} = -1 \Longrightarrow V'(0^-) = -1$

Luego $\left.\begin{matrix} v'(0^+)=1 \\ v'(0^-)=-1 \end{matrix}\right\}$ Como las derivadas laterales son distintas, luego V no es derivable en $x_0 = 0$

Derivabilidad en un interno

Sea *f* una función, J un intervalo contenido en $d[f], J \subset d[f]$, es derivable o diferenciable en J (puede ser intervalo abierto o cerrado) si lo es en cada punto de J

- *f* es derivable en (*a*, b) si en cada punto de este intervalo existen y coincide las derivadas laterales.
- *f* es derivable en [*a*, b] si *f* es derivable en el interior de intervalo y además, existen $f'(a^+)\ y\ f'(b^-)$

Continuidad y Derivabilidad

Teorema: Si *f* es derivable en [*a*, b] entonces *f* es continua en [*a*, b]

Demostración Sea *f* derivable en [*a*, b]

Si x_0 es un punto cualquiera de [*a*, b], para $h \neq 0 / x_0 + h \in [a, b]$ podemos escribir:

$\Delta f\ (x_0, h) = \frac{\Delta f\ (x_0, h)}{h} .\ h$ (1)

Como *f* es derivable en el punto x_0, el segundo miembro de (1) tiene limite para $h \to 0$ y es cero, por lo tanto, el primer miembro de (1) también lo tiene y es cero

$\lim_{h\to 0} \Delta f\ (x_0, h) = 0$ es decir $\lim_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$

Luego $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ (Definición de Continuidad)

El reciproco de este teorema es falso en general, o sea:

$$f\ es\ continua \not\Rightarrow f\ es\ derivable$$

Algebra de Derivada

Sean f y g funciones derivables en un dominio $j, c \in \mathbb{R}$ entonces $f + g;\ c.g;\ \ f - g;\ f.g$ y son derivables en J y:

- $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$
- $(c.g)'(x) = c.f'(x)$
- $(f - g)(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(f.g)'(x) = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$

Demostración $(f' + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Por hipótesis se tiene $x \in j, h \neq 0 / x + h \in j$

$\exists\ y\ es\ finito\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

$\exists\ y\ es\ finito\ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$

1) Se forma el cociente incremental

$\frac{\Delta\,(f+g)(x,h)}{h} = \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = (Algebra\ de\ funciones)$

$\frac{f(x+h)+g(x+h)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}$

$\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = (Se\ agrupa\ f\ y\ g)$

$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} =$

$\frac{\left(f+(x+h)-f(x)\right)+(g(x+h)-g(x))}{h} = (Separo\ el\ denominador)$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Luego

$\frac{f(x+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ \frac{\Delta(f+g).(x.h)}{h} = \frac{\Delta\, f(x.h)}{h} + \frac{\Delta\, g(x.h)}{h}$

Como f y g

son derivables en x, podemos decir que los siguientes limites existen y son finitos

$\lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}(Existe\ por\ hipotesis) +$
$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}(Existe\ por\ hipotesis)$

$= f'(x) + g(x)$

$\Longrightarrow \exists$ el limite en el primero miembro

$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(f+g)(x.y)}{h} = f'(x) + g'(x)$

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'$

- $(c.f)'(x) = cf'(x)$
  Sea $x \in J, h \neq 0 / x + h \in J$
  1. Se forma el cociente incremental
     $\frac{\Delta(c.f)(x,y)}{h} = \frac{(c.f)(x+h)-(c.f)(x)}{h} = \frac{c.f(x+h)-c.f(x)}{h} =$
     $(Saco\ f.comun\ de\ c)$

     $\frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h} = \frac{c\,\Delta\, f(x,h)}{h}$
     $\frac{\Delta(c.f)(x,h)}{h} = c\frac{\Delta(x,h)}{h}$
  2. ¿ $\exists$ y es finito el limite en el segundo miembro?
     $\lim_{h\to 0}\frac{c\Delta f(x,h)}{h} = (Alg.de\ limite)\ c\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\, f(x,h)}{h}(\exists\ por\ hip.) = cf'(x)$
     $\Longrightarrow \exists$ limite en el 1° miembro
     $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(c.f)(x,h)}{h} = c'f(x)$
     $(c.f)'(x) = cf'(x)$
- $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x)\,g'(x)$
  Sea $x \in J / x + h \in J \qquad h \neq 0$
  1. Formar el cociente incremental
     $\Delta\frac{(f.g)(x,h)}{h} = \frac{(f.g)(x+h)-(f.g)(x)}{h} = (Alg.de\ Func.)$
     $\frac{f(x+h)g(x)+f(x+h)\,g(x)-f(x+h)\,g(x)-f(x)\,g(x)}{h}$
     $= (F.comun)\ \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$
     $= (Separo\ denominadores)\ f(x+h)\ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} +$
     $g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\frac{\Delta(f.g)(x,h)}{h} = f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. $\exists$ y es finito el limite del 2° miembro

$\lim_{h\to 0}[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]$

$= \lim_{h\to 0}[f(x+h)\frac{\Delta g(x,h)}{h} + g(x)\frac{\Delta f(x,h)}{h}]$

$= (Alg.de\ lim.)\lim_{h\to 0} f(x+$

$h)\,(como\ f\ es\ derivable\ es\ continua)\lim_{h\to 0}\frac{\Delta g(x,h)}{h}\ (\exists\ por\ hip.) +$

$\lim_{h\to 0} g(x)\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x,h)}{h}(\exists\ por\ hip.)$

$= f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

$\Rightarrow$ como $\exists$ el limite en el 2° miembro existe en el primer miembro

$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(f.g)(x,h)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x).g'(x)$

Propiedad: Si f y g son funciones derivables en J y sea $D = \{x / x \in J \wedge g(x) \neq 0$ entonces

$\frac{f}{g}$ es derivable en J y $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejemplo 1 $h(x) = tg(x)$ encontrar la derivada

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan'(x) = \frac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x$

Ejemplos de derivación

$f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = x^m \Longrightarrow f'(x) = mx^{m-1}$

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

$f(x) = \frac{3}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = 3.\frac{3}{5}x^2 = \frac{9}{5}x^2$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

$f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x)\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x^2 + e^{2x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2e^{2x}$

$f(x) = (2x+1).\ln(3x) \Rightarrow f'(x) = 2\ln(3x) + (2x+1)\frac{1}{\cancel{3x}}.\cancel{3}$

$= 2\ln(3x) + \frac{(2x+1)}{x}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$f(x) = \frac{\cos x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin(x)\,x^2 - \cos x.2x}{x^2}$

$= \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^2}$

Derivada de la composición de Funciones (Regla de cadena)

Si f es una función derivable en un intervalo J y g una función derivable en un intervalo que contiene a $f[J]$ entonces en función g o f es derivable en J y:

$(g\ o\ f)'(x) = g'[f(x)]f'(x)$

Ejemplo 02: $f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -\sin 2x\ .2 = -2\sin 2x$

Ejemplo 03: $f(x) = \sin^3 x$

$f'(x) = 3\sin^2 x\,.\cos x$

Ejemplo 04: $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 2\cos x} = (x^2 - 2\cos x)^{\frac{1}{5}}$

$f'(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2\cos x)^{\frac{1}{5}}\ (2x + 2\sin x)$

Ejemplo 05: $f(x) = \tan(2x)\ .\sin(3x - 1)$

$f'(x) = (\sec^2(2x)\,.2).\sin(3x - 1) + \tan(2x)\cos(3x - 1)\ .\ 3$

$f'(x) = (2\sec^2 x)\sin(3x - 1) + 3\tan(2x)\cos(3x - 1)$

Derivada de la Función Inversa

Sea f una función estrictamente monótona y continua en un intervalo J. El conjunto f^{-1}es también una función estrictamente monótona y continua en $f(J)$.

Teorema: Si f es una funcion estrictamente monótona y continua en un intervalo J. Si en un punto $x_0\ de\ J$ existen y no se anulan la derivada en $f'(x_0)(f'(x_0) \neq 0)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(J)$ si se verifica $(f^{-1})^1\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Demostración Sabemos que

$f^{-1}\ o\ f = I(Funcion\ Identidad)$

$(f^{-1}\ o\ f)(x) = I(x) = I\ derivando\ miembro\ a\ miembro$

$\neq 0$

$(f^{-1}\ o\ f)^1 = (f^{-1})^1[f(x)]f'\,\widetilde{(x)} = 1$ (Dividimos por f(x))

$= (f^{-1})^1\,[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$

Ejemplo: $f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln x \qquad f'(x) = e^x$

$(f^{-1})^1(e^x) = \frac{1}{f'(x)}$

t

$(\ln x)\,\widetilde{e^x} = \frac{1}{f'(x)}$

$\ln t = \frac{1}{f'(x)}$

$\frac{1}{t} = \frac{1}{f^{-1}(x)}$

$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}$

Derivada de una función elevada a otra funcion

Sea la función $h(x) = f(x)^{g(x)}$

1. Aplico ln(Logaritmo neperiano) en ambos miembros
   $\ln h(x) = \ln[f(x)]^{g(x)}$
   $\ln h(x) = g(x)\ln(f(x))$
2. Derivo m.a.m (Miembro a miembro)
   $\frac{1}{h(x)}\ h'(x) = g'(x)\ln\big(f(x)\big) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$
3. Despejo $h'(x)$
   $h'(x) = h(x)[g'(x)\ln\big(f(x)\big) + g(x)\frac{1}{f(x)}\ f'(x)]$
4. Reemplazo $h(x)$
   $h(x) = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln(fx) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$

Ejemplo: $h(x) = x^{e^x}$

1. Aplico ln en ambos miembros
   $\ln h(x) = \ln\,(x^{e^x})$
   $\ln h(x) = e^x \ln x$
2. Derivo m.a.m.
   $\frac{1}{h(x)}\ .h'(x) = e^x \ln x + e^x\frac{1}{x}$

3. Despejo $h'(x)$

$$h'(x) = h(x)[e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}]$$

$$h'(x) = xe^x[e^x \ln x + \frac{e^x}{x}]$$

Aplicaciones de la derivada

Trataremos dos problemas

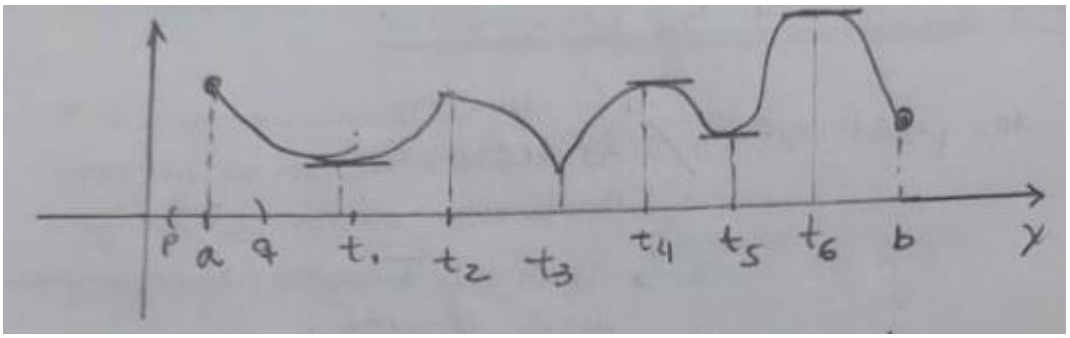
- El de determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo.
- Y el de trazar la gráfica de una función.

Extremos Absolutos: El teorema de Weierstrass dice que una función continua en un intervalo cerrado tiene máximo y mínimo absoluto en ese intervalo, pero no proporciona un método para determinarlo.

Se dice que una función *f* tiene Máximo relativo (Mínimo relativo) en un punto c (c') de su dominio, si ∃ un intervalo $J = (p, q)$ tal que $c \in J$ ($c' \in J$) y para cada $x \in d[f] \cap J$ se verifica $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$) el numero $f(c)$ se llama **Máximo relativo de la función (Mínimo relativo)**

Se llama **Extremos relativos** o simplemente extremos, a los máximos y mínimos relativos.

Sea *f* definida en el intervalo $[a, b]$



La función tiene máximos relativos en, a, t_2, t_4, t_6, mínimos relativos en t_1, t_3, t_5, b, además, f tiene Máximos absolutos en t_6 y mínimo absoluto en t_3.

- Los extremos relativos se dan en los puntos t tales que $f'(t) = 0$ y en los puntos donde f no es diferenciable y en los extremos del intervalo.

Teorema: Si fuera función definida en un intervalo abierto (a, b) quien tiene un extremo relativo en un punto c.

Si f es diferenciable en c entonces $f'(c) = 0$

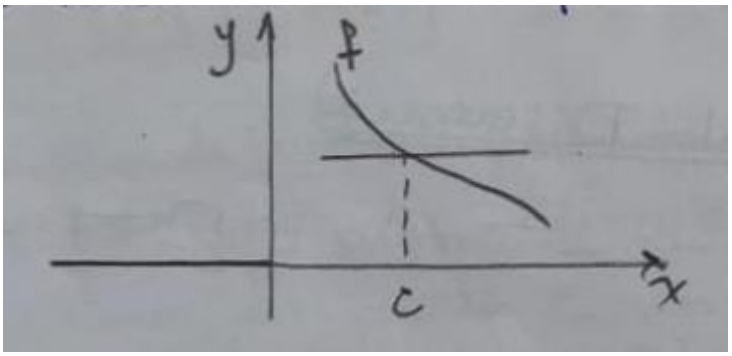
La condición necesaria para la existencia de extremos relativos en c supuesta la existencia de la derivada.

Se denomina **Puntos críticos** de una función f definida en un intervalo a:

- Los puntos desde el valor de la derivada es cero
- Los puntos donde la función no es derivable, y
- Los extremos del intervalo si es que estos están en el mismo.

Del teorema anterior se deduce que los extremos relativos de una función definida en un intervalo pueden darse únicamente en los puntos críticos.

Observamos que una función no tiene necesariamente un extremo relativo en cada punto crítico.



$f'(c) = 0$ pero no existe un extremo relativo en c

Observando: Que los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado son extremos relativos y estos solo pueden darse en ellos puntos críticos, para determinar los extremos absolutos calculamos los valores de la función en los puntos críticos y el mayor valor y el menor valor será M y m absoluto

Ejemplo: Determinar los extremos absolutos de la función.

$f(x) = 8x^2 - 16x + 42\ en\ [0,2]$

$f'(x) = 16x - 16$ como

$f'(x) = 0$

$16x - 16 = 0$

$16(x - 1) = 0 \implies x = 1$

f es derivable en (0,2)

Los puntos críticos son x =1

$f(1) = 8.1^2 - 16.1 + 42 = 8 - 16 + 42 = 34$

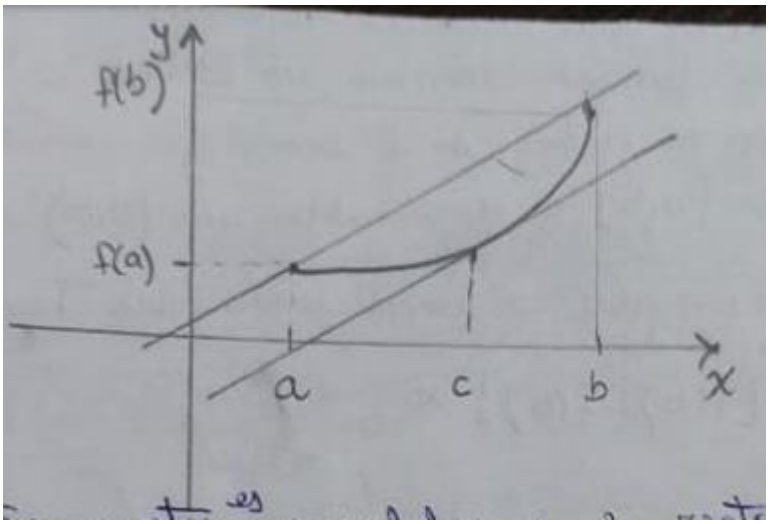
En el punto (1,34) hay un extremo absoluto

Teorema del Valor Medio del Calculo Diferencial

Consideremos funciones definidas en un intervalo [a, b] tal que $a < b$

Si *f* es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el interior de dicho intervalo ∃ por lo menos un punto c en el intervalo (a, b) tal que

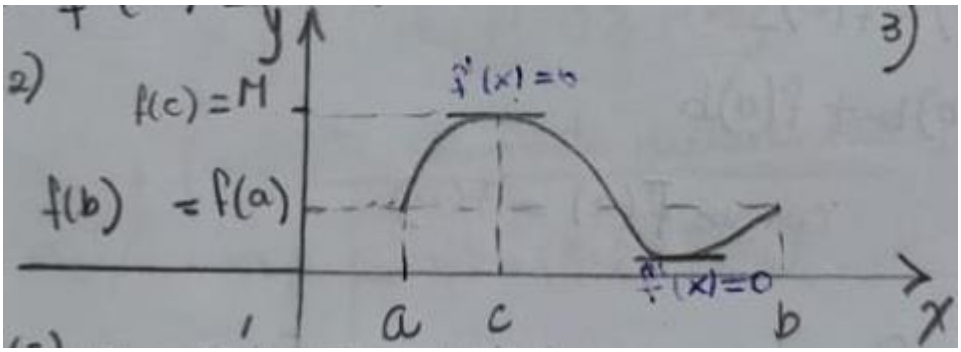
$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Geométricamente el Teorema de Valor Medio(T.V.M.) dice que si la gráfica de una función continua en un intervalo $[a, b]$ admite recta tg en los puntos $(x, f(x))$ siendo $x \in (a, b)$ entonces por lo menos una de las tangentes es paralelas a la recta que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)\ y\ (b, f(b))$.

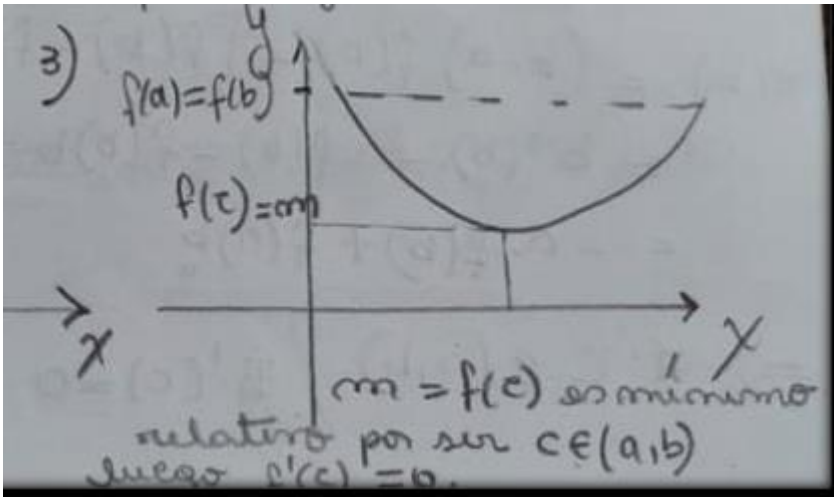
Teorema de rolle

Si *f* es una función continua en $[a, b]$ derivable en el interio del intervalo y además $f(a) = f(b) \implies$ ∃ por lo menos un punto c en el interior del intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$, $(D/Sea\ f(rx) = k\ con\ k \in \mathbb{R}\ su\ f'(x) = 0\ y\ cumple\ el\ teorema)$



$M = f(c)$ un maximo relativo por ser $c \in (a, b)$

luego$f'(c) = 0$



$m = f(c)$ es minimo relativo por ser $c \in (a, b)$ $luego\ f'(c) = 0$

Prueba del T.V.M. Sea *f* una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Construimos a partir de *f* una función *F* que, además de ser continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) satisface $F(a) = F(b)$. La función *F* cumple las condiciones del Teorema de rolle

$F(x) = (b - a)f(x) - [f(b) - f(a)].x$ se puede verificar:

F es continua en $[a, b]$ y derivable (a, b)

$F(a) = (b - a)f(a) - [f(b) - f(a)].a$

$F(a) = b\cancel{f(a)} - af(a) - f(b)a + \cancel{f(a)}a$

$F(a) = bf(a) - af(b)$

$F(b) = (b - a)f(b) - [f(b) - f(a)]b$

$F(b) = \cancel{bf(b)} - af(b) \cancel{- f(b)} + f(a)b$

$F(b) = -af(b) + f(a)b$ Como $F(a) = F(b) \Longrightarrow \exists\ c \in (a, b)/E'(c) = 0$

$F'(x) = f'(x)(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0$

$F'(c) = (b-a)f'(c) - [f(b) - f(a)] = 0$

$F'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq$

Derivadas sucesivas

Podemos considerar la función f'' cuyo dominio es $d[f'']$. Constituidas por los puntos "x" de $d[f']$ para los cuales f' es derivable:

$f''(x) = (f'(x))' = (f')'(x)$

$$f''(x) \text{ se llama derivada segunda de } f.$$

Funciones Monótonas

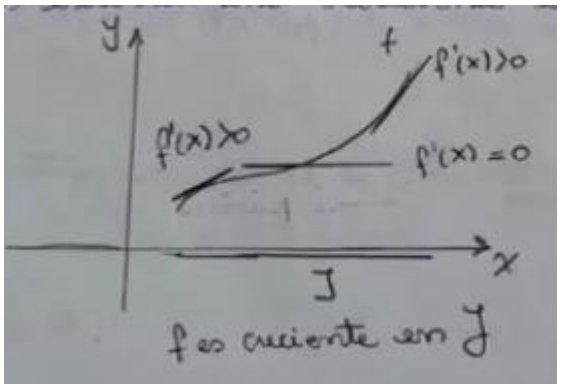
Recordar

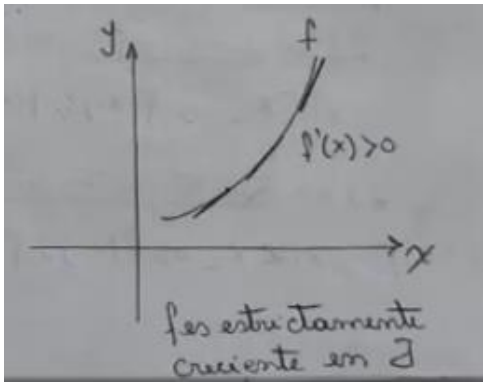
- f *es creciente en* J *si dado dos números* $x_1, x_2 \in j$ *tal que* $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f *es estrictamente creciente en* J *si existen dos números* $x_1, x_2 \in J / x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f *es decreciente en* J *si existen dos numeros* $x_1, x_2 \in J / x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f *es estrictamente decreciente en* J *si existen dos puntos* $x_1, x_2, \in J / x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

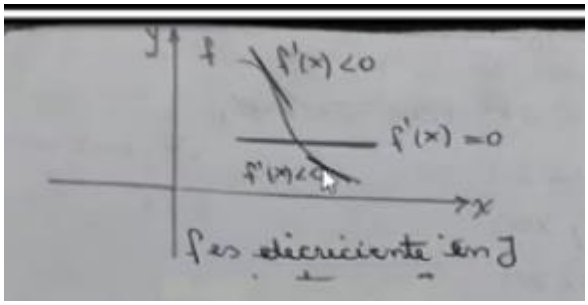
El siguiente teorema relaciona monotonía con derivabilidad

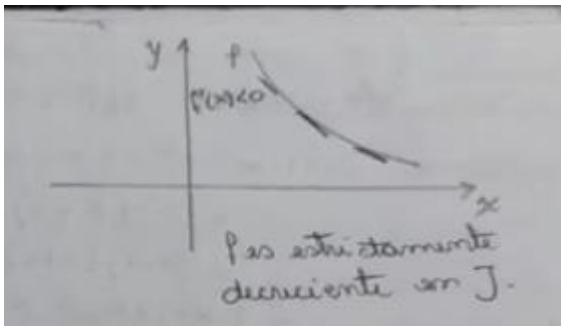
Teorema: Sea f una función continua en un intervalo J derivable en el interior de $J(J'')$

1. Si la derivada $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in J^0$, la función f es creciente en J.
2. Si la derivada $f'(x) > 0$, para todo $x \in J^0$, la función f es estrictamente creciente en J
3. Si la derivada $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in J^0$, la función f es decreciente en J.
4. Si la derivada $f'(x) < 0$, para todo $x \in J^0$, la función f es estrictamente decreciente en J.


y
f
f'(x)>0
f(x)>0
f'(x)=0
x
J
f es creciente en J


y
f
f'(x)>0
x
f es estrictamente
creciente en J


y
f
f'(x)<0
f'(x)=0
x
f es decreciente en J


y
f
x
f es estrictamente
decreciente en J.

Demostración Parte 1

Sea $x_1\ y\ x_2 \in J$ tal que $x_1 < x_2$, aplicamos el Teorema del valor medio del cálculo diferencial, f es continua en $[x_1, x_2]$ derivable en (x_1, x_2)entonces $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En 1 me dice que $f'(x) \geq 0\ \forall\ x\ \in J^0 \Longrightarrow f'(c) \geq 0$ para todo $c \in (x_1, x_2)$ como $x_1 < x_2\ \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0$ como $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1(Es\ positivo)} \geq 0 \Longrightarrow$ $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Longrightarrow$ f es creciente en $[x_1, x_2] \Longrightarrow f$ es creciente en todo punto de J.(Por definición de función creciente)

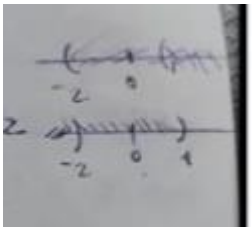
Ejemplo: Determinar los intervalos donde la función es estrictamente creciente $f/f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 9$

Derivamos $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 > 0$

$f(x) = 6(x^2 + x - 2) > 0 \qquad x^2 + x - 2 = 0 \quad x = 1 \quad x = -2$

$f(x) = 6(x - 1)(x + 2) > 0$

$$(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0 \\ \vee \\ x - 1 < 0 \wedge x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \wedge x > -2 \\ \vee \\ x < 1 \wedge x < -2 \end{cases}$$



$\Longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Luego f es estrictamente creciente $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

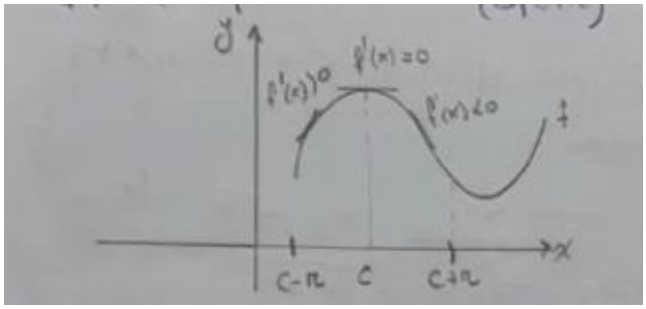
f es estrictamente decreciente $(-2, 1)$

Extremos Relativos

Criterio de la primera derivada

Sea c un punto critico de f. Si existe un numero positivo r tal que f es continua en $[c-r, c+r]$

1) $\begin{matrix} Si\ f'(x) \geq 0\ para\ todo\ x \in (c-r,c) \\ f'(x) \leq 0\ para\ todo\ x \in (c,c+r) \end{matrix} \Longrightarrow f\ tiene\ un\ maximo\ relativo\ en\ c$



2) $\begin{matrix} Si\ f'(x) \leq 0\ para\ todo\ x \in (c-r,c) \\ f'(x) \geq 0\ para\ todo\ x \in (c,c+r) \end{matrix} \Longrightarrow f\ tiene\ un\ minimo\ relativo\ en\ c$
3) $Si\ f'(x) > 0 (o\ f'(x) < 0)$ para todo $x \in E^*(Entorno\ reducido)(c,r)$, entonces f no tiene, en "c" un máximo ni mínimo relativo.

Criterio de la derivada segunda

Si una función es derivable en algún $E(c,f)$ se verifica que $f'(c) = 0$ y existe la segunda derivada $f''(c)$ y además

1) Si $f''(c) < 0 \Longrightarrow$ la función tiene un máximo relativo en "c"
2) Si $f''(c) > 0 \Longrightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en "c"
   - Continuamos con el ejemplo $f/f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 9$

   Criterio de la 1° Derivada

   $f'(x) = 6(x-1)(x+2)$ para $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix}\ hay\ puntos\ criticos$

   Vamos analizar para un entorno de $x = 1$

   $\left.\begin{matrix} f'(1^-) = +.-.+ = - \\ f'(1^+) = +.+.+ = + \\ Pasa\ de - a + hay \\ minimo \end{matrix}\right) \Longrightarrow f\ tiene\ un\ minimo\ relativo\ \big(1, f(1)\big) = (1,2)$

$x = -2$

$$\left.\begin{array}{c} f'(-2^-) = +.-.- = + \\ f'(-2^+) = +.-.+ = - \\ de\ +a-hay \\ maximo \end{array}\right\} \Longrightarrow f\ tiene\ un\ maximo\ relativo\ \big(-2,\ f(-2)\big) = (-2{,}29)$$

Vamos a utilizar el criterio de la derivada segunda

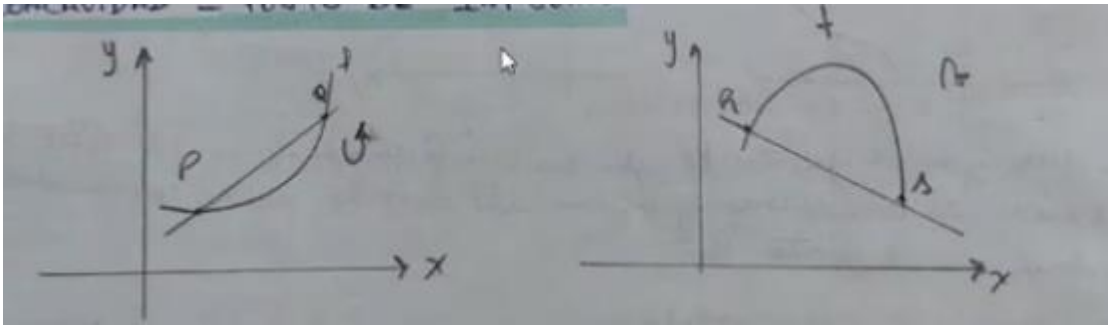
$f'(c) = 0\ para\ c = 1\ \wedge c = -2$

$f''(-2) = 12x + 6$

$f''(-2) = 12.(-2) + 6 = -24 + 6 = -18 < 0 \Longrightarrow$ f tiene un máximo relativo en $(-2, f(-2))$

$f''(1) = 12.1 + 6 = 12 + 6 = 18 > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $(1, f(1))$

Concavidad-Punto de Inflexión

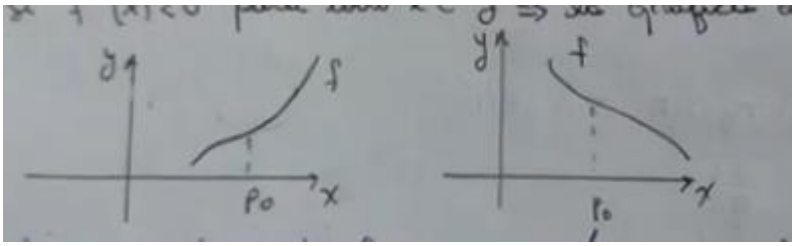


Geométricamente una función continua es cóncava hacia arriba si dados dos puntos P y Q el arco de curva $\widehat{PQ}$(Cóncava hacia arriba)esta situado debajo del segmento $\overline{PQ}$ de recta que une dados puntos.

Una función es cóncava haca abajo si dados dos puntos R y S. Si el arco de curva $\widehat{RS}$ esta situado por arriba del segmento $\overline{RS}$ de recta que une dichos puntos.

Teorema: Sea f una función definida en un intervalo J con f'' en dicho intervalo

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in J \Longrightarrow$ la grafica de f es
- Si $f''(x) < 0$ para todo x $\in J \Longrightarrow$ la grafica de f es



Se dice que el punto p_0 de la gráfica de f es **Punto de Inflexión** si en dicha gráfica el sentido de la concavidad cambia en el punto p_0

- Seguimos con el ejemplo
  $f''(x) = 12x + 6 > 0$
  $= 12x > 6 \implies x > -\frac{1}{2} \implies en\ (-\frac{1}{2}, +\infty)$ f es

  $x = -\frac{1}{2}$ la función presenta punto de inflexión?

  $f''(x) = 12x + 6 = 0$

  $12x = -6$

  $x = -\frac{1}{2}$ Luego en $(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right))$ hay punto de inflexión.

Regla de Bernoulli L'Hopital

Teorema 1: Si f y g son funciones derivables en un $E^*(x_0, r)$ para algún $r > 0$, siendo $g'(x) \neq 0$ en cada punto x del entorno

- Si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = 0$ y
- Existe y es finito $\lim_{x_0} \frac{f'}{g'}$ entonces $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x_0} \frac{f'}{g'}$

Ejemplo 01

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x + 5}{2x - 2} = -\frac{5}{2}$$

Teorema 2: Si f y g son funciones derivables en $(x_0 - r, x_0)$ para algún $r > 0$, siendo $g(x) \neq 0$ en cada punto "x" de dicho intervalo

- $\lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g = 0\ y$
- Existe y es finito el $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$

Teorema 3: Si f y g son funciones derivables en algún entorno reducido de x_0 siendo $g'(x) \neq 0$ para cada punto "x" de dicho conjunto

- $\lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} g = 0$
- Existe y es finito $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$

Ejemplo 02

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

Teorema 4: Si f y g son funciones con derivadas hasta el orden "m" inclusive en $E^*(x_0)\ y\ g^{(m)}(x) \neq 0$.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)} = \lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)} = 0$ con $k = 0,1, \dots, (n-1)$
- Si existe y es finito $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(m)}}{g^{(m)}}$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(m)}}{g^{(m)}}$

Ejemplo 03

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{5x^4}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{20x^3}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{60x^2}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{120x}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{120} = 0$$

Teorema Generalizado de Bernoulli-l'Hôpital (Regla de Bernoulli-l-Hôpital)

Con α se representará a $x_0, \infty, -\infty$.

Si

- f y g son funciones derivables hasta el orden n inclusive en $E^*(\alpha)$, siendo $g^{(n)}(x) \neq 0$ para cada $x \in E^*(\alpha)$,
- Para cada $k = 0,1, \dots, n-1$: $\lim\limits_{x\to\alpha} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g^{(k)}(k) = 0\ o\ \lim\limits_{x\to\alpha} \left|f^k(x)\right| = \lim\limits_{x\to\alpha} \left|g^k(x)\right| = \infty$ y
- Existe $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, entonces $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

Nota

- Si se cumplen las condiciones del teorema generalizado, se lo aplica directamente para resolver casos de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}\ y\ \frac{\infty}{\infty}$.
- Los casos de indeterminación del limite: $0.\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ se reducen al tipo $\frac{0}{0}\, o\, \frac{\infty}{\infty}$ para salvar la indeterminación aplicando la regla de l'Hopital